Développement : Méthode archimédienne pour approcher π .

RM

2022-2023

Référence :

1. 131 dvp

Énoncé :

Pour tout n entier tel que $n \geq 2$, on note u_n l'aire d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O de coordonnées $(0,0)$ et de rayon 1 dans le repère euclidien usuel. Alors la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge linéairement vers π et nous donne une méthode d'approximation de π.

On rappelle que :

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge linéairement vers sa limite $l \in \mathbb{R}$ s'il existe $M \in [0,1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| = M$. Le terme "linéairement" fait référence au fait que l'exposant de l'erreur $|u_n - l|$ dans l'inégalité ci-avant est 1, par opposition par exemple au cas de la convergence quadratique, caractérisée quant à elle par la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}-l|}{(u_n-l)^2} = M'$ pour un $M' > 0$.

Résolution :

On remarque tout d'abords que u_n est bien défini pour tout $n \geq 2$: si l'on définit pour tout $k \in [\![0\,;2^n-1]\!]$ le point A_k comme ayant pour coordonnées polaires $(1, \frac{k\pi}{2^{n-1}})$ dans le repère euclidien usuel, alors u_n représente l'aire du polygone convexe dont les sommets sont les points A_k.
Par ailleurs, si $n \geq 2$ alors u_n est égal à 2^n fois l'aire du triangle de sommets O, A_0 et A_1 (faire une jolie figure). On a donc avec $A = \frac{b\times h}{2}$

$$u_n = 2^n \frac{1 \times \sin(\pi/2^{n-1})}{2} = 2^{n-1}\sin(\frac{\pi}{2^{n-1}}).$$

Comme $\sin(x) \sim x$ lorsque $x \to 0$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$. Plus précisément, le développement limité de sin à l'ordre 3 en 0 donne, lorsque n tends vers $+\infty$:

$$\pi - u_n = 2^{n-1}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) + o\left(\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)^3\right)\right] = \frac{2\pi^3}{3.4^n} + o(\frac{1}{4n}).$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\pi - u_{n+1}|}{|\pi - u_n|} = \frac{1}{4}$$

Ce qui montre que $(u_n)_{n\geq 2}$ converge linéairement vers π.

La première formule de u_n ne peut pas être utilisée directement pour calculer numériquement u_n si l'on ne dispose pas d'une approximation précise des valeurs de la fonction sin ainsi que celle de π... ce qui est exactement l'objectif de ce développement ! Comme $u_2 = 2$ est connu, on souhaite donc expliciter une relation de récurrence entre les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ ne faisant pas apparaître le nombre π. Si $n \geq 2$, on peut écrire

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Or

$$\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 1.$$

en vertu de la formule $cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2(\pi/2^{n-1})}}{2}}.$$

On réinjecte ceci dans la 1-ère formule

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\sqrt{2+2\sqrt{1-\sin^2(\pi/2^{n-1})}}.$$

soit

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}{\sqrt{2+2\sqrt{1-\sin^2(\pi/2^{n-1})}}}.$$

Ceci se réécrit

$$2^{-n}u_{n+1} = \frac{2^{-(n-1)}u_n}{\sqrt{2+2\sqrt{1-2^{-2(n-1)}u_n^2}}}.$$

Et finalement

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+1\sqrt{1-2^{-2(n-1)}u_n^2}}}.$$

Cette relation de récurrence ne fait pas apparaître le nombre π et permet donc le calcul explicite de u_n pour tout $n \geq 2$ (et donc l'approximation de π) par multiplication, divisions et extraction de racines carrées.

Annexe :

La méthode d'Archimède à proprement parler, présentée dans le traité d'Archimède intitulé *De la mesure du cercle*, consiste à considérer le périmètre p_n du polygone étudié dans ce développement et le périmètre P_n d'un polygone régulier à 2^n côtés circonscrit au cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. On a alors l'encadrement $p_n \leq \pi \leq P_n$. On peut aussi trouver les valeurs de p_n et P_n. Pour trouver p_n, on un des côtés du polygone, puis on multiplie par le nombre de côtés, soient 2^n. Par Pythagore, on a que un côté mesure

$$\begin{aligned}
c &= \sqrt{\sin^2(\pi/2^{n-1}) + (1-\cos(\pi/2^{n-1}))^2} \\
&= \sqrt{\sin^2(\pi/2^{n-1}) + \cos^2(\pi/2^{n-1}) + 1 - 2\cos(\pi/2^{n-1})} \\
&= \sqrt{2(1-\cos(\pi/2^{n-1})} \\
&= \sqrt{4\sin^2(\pi/2^n)} = 2\sin(\pi/2^n) \text{ car } \pi/2^n \in [0,\pi]
\end{aligned}$$

On trouve donc $p_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
Pour trouver P_n, on remarque que la longueur d'un côté est en faite 2 fois la longueur de la tangente

du point $\pi/2^n$ par construction. Soit $c = 2\tan(\pi/2^n)$.
On trouve alors $P_n = 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. On peut alors trouver des relations de récurrence

$$\begin{aligned} p_{n+1}^2 &= 2^{2(n+2)}\sin^2(\pi/2^{n+1}) \\ &= 2^{2(n+1)}\tan(\pi/2^{n+1})\sin(\pi/2^{n+1})\cos(\pi/2^{n+1}) \\ &= 2^{2n+3}\tan(\pi/2^{n+1})\sin(\pi/2^n) \\ &= 2^{n+2}\tan(\pi/2^{n+1})2^{n+1}\sin(\pi/2^n) \\ &= P_{n+1}p_n \end{aligned}$$

On en déduit que $p_{n+1} = \sqrt{P_{n+1}p_n}$.

$$\begin{aligned} \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n} &= \frac{2p_nP_n}{2^{n+1}\sin(\pi/2^n)(1+\frac{1}{\cos(\pi/2^n)})} \\ &= \frac{2p_nP_n}{2^{n+1}\sin(\pi/2^n)(\frac{1+\cos(\pi/2^n)}{\cos(\pi/2^n)})} \\ &= \frac{2p_nP_n}{2^{n+1}\tan(\pi/2^n)(2\cos^2(\pi/2^{n+1}))} \\ &= \frac{p_n}{\cos^2(\pi/2^{n+1})} \\ &= \frac{2^{n+1}\sin(\pi/2^n)}{\cos^2(\pi/2^{n+1})} \\ &= \frac{2^{n+2}\sin(\pi/2^{n+1})\cos(\pi/2^{n+1})}{\cos^2(\pi/2^{n+1})} \\ &= 2^{n+2}\tan(\pi/2^{n+1}) = P_{n+1} \end{aligned}$$

On trouve alors $P_{n+1} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$.
De ceci on en peut déduire la convergence vers π des deux fonctions en montrant qu'elles sont adjacentes.
On a $P_{n+1} \geq p_n$, donc $p_{n+1} = \sqrt{p_nP_{n+1}} \geq \sqrt{p_n^2} = p_n$ et donc la suite (p_n) est croissante et majoré par π, donc elle converge vers une limite notée l. De plus, $P_n \geq p_n$ et donc $P_{n+1} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n} \leq \frac{2p_nP_n}{2p_n} = P_n$ et donc la suite est décroissante et minoré par π, donc elle converge vers une limite notée L. Enfin, on a alors que $l = \sqrt{lL}$, donc $l^2 = lL$ et $l(l-L) = 0$. Comme l est non nul car p_n croissante, on a que $l = L$. Finalement, le suites sont adjacentes et donc convergent vers la même limite π.